

DISEI - Università degli Studi di Firenze

Working Papers - Economics

# Eco-Efficienza con Data Envelopment Analysis

Giuliano Resce

Working Paper N. 06/2014

DISEI, Università degli Studi di Firenze  
Via delle Pandette 9, 50127 Firenze, Italia  
[www.disei.unifi.it](http://www.disei.unifi.it)

The findings, interpretations, and conclusions expressed in the working paper series are those of the authors alone. They do not represent the view of Dipartimento di Scienze per l'Economia e l'Impresa, Università degli Studi di Firenze

# Eco-efficienza con Data Envelopment Analysis

---

**Giuliano Resce\***

*Abstract:* Nel valutare l'eco-efficienza con *Data Envelopment Analysis* è necessario fare delle scelte metodologiche e adottare uno tra i vari approcci presenti in letteratura. Ogni metodo si differenzia dagli altri sia per il modo di trattare il bad output sia per i risultati ottenuti. La valutazione risulta condizionata direttamente dalla metodologia che si decide di utilizzare e si mostra perciò quanto più importante conoscerne le peculiarità. Questo lavoro è volto ad analizzare le caratteristiche tecniche degli approcci più rilevanti ed evidenziarne le differenze. Nella parte finale tali diversità sono messe in evidenza su un caso di studio che riguarda 22 paesi dell'OECD.

*JEL Codes:* C61, D24, Q56

*Keywords:* Eco-efficienza, Data Envelopment Analysis, Undesirable Outputs, Reference Technology

\*Assegnista di Ricerca presso il Dipartimento di Scienze per l'Economia e l'Impresa, Via delle Pandette 21, 50127, Firenze. Tel. 055 2759475. E-mail [Giuliano.Resce@unifi.it](mailto:Giuliano.Resce@unifi.it). Ringrazio il Professor Vincenzo Patrizii per i suoi preziosi suggerimenti in fase di ricerca, in fase di elaborazione del testo e in fase di revisione. Resto l'unico responsabile del testo.

## Introduzione

L'obiettivo del presente lavoro è permettere, a chi abbia intenzione di valutare l'eco-efficienza con *Data Envelopment Analysis* (DEA), di essere in grado di poter scegliere l'approccio più opportuno allo studio che intende realizzare.

L'eco-efficienza, così come l'efficienza convenzionale, è intesa come il rapporto tra produttività osservata e produttività massima possibile. La produttività in presenza di due tipologie di dati ( $x = input$ ,  $y = output$ ), è data dal rapporto tra la quantità di output e la quantità di input utilizzato nel processo di produzione:

$$\frac{y}{x} \quad (1)$$

che esprime la capacità di produrre il maggior output usando il minor input possibile. Nelle valutazioni con DEA l'assunzione di base è che la produttività massima possibile sia la massima osservata tra le aziende in analisi. In tal modo l'azienda più produttiva ha efficienza pari a uno (efficienza massima), quelle meno produttive hanno efficienza compresa tra zero e uno.

In presenza di tre tipologie di dati ( $x = input$ ,  $y_B = badoutput$ ,  $y_G = goodoutput$ ), in cui un output è desiderabile e uno è non desiderabile, la produttività non si presenta più come un concetto così immediato. In questi casi prima di avviare una valutazione con DEA è necessario scegliere, con la consapevolezza che la produttività ha una duplice funzione: valutare l'azienda e stabilire il massimo possibile (i confini delle possibilità produttive).

Per quanto attiene alla prima funzione, la produttività deve avere due dimensioni differenti:

$$\frac{y_G}{x}, \frac{y_G}{y_B} \quad (2)$$

dove il primo rapporto è la convenzionale produttività espressa anche dalla (1), il secondo rapporto esprime la capacità di produrre il maggior *good* output inquinando il meno possibile.

Per quanto attiene alla seconda funzione (stabilire il massimo possibile) è indispensabile tenere in considerazione tre indicatori:

$$\frac{y_G}{x}, \frac{y_G}{y_B}, \frac{y_B}{x} \quad (3)$$

poiché, per quanto il terzo rapporto sia discutibile (avendo il *bad* output al numeratore aumenta all'aumentare dell'inquinamento prodotto), è necessario per stabilire la produttività massima nella produzione di *bad* output, un punto che non può essere superato. Imporre questo limite è indispensabile per DEA, poiché la valutazione è fatta con un problema di ottimizzazione (massimizzazione dei ricavi e/o minimizzazione dei costi) in cui l'insieme ammissibile è la *reference technology* (area delle possibilità produttive), che si basa sulla combinazione lineare dei dati osservati. Questa caratteristica di DEA, se da un lato libera l'analista dalla scelta di una specifica forma funzionale, dall'altro richiede che sia posta la massima attenzione nel decidere quali dati mettere tra gli input e quali tra gli output.

Questo lavoro è strutturato come segue: nel primo paragrafo si illustra il concetto di *Reference technology* in DEA, nel secondo si analizzano le peculiarità dei principali metodi c.d. *weak disposable*, il terzo prende in considerazione ed illustra le caratteristiche dei principali metodi c. d. *strong disposable*. Il quarto capitolo, che chiude il lavoro, è dedicato ad un caso di studio che riguarda la valutazione dell'eco-efficienza in 22 paesi OECD. Il caso di studio è usato per mettere in luce le principali caratteristiche e differenze di tutti i metodi presentati.

## **1. Reference technology in DEA**

La *reference technology* è l'area delle possibilità produttive, quindi dipende dalla tecnologia (la funzione di produzione), che trasforma l'input nell'output. Senza la necessità che sia nota la funzione di produzione preso un vettore di input  $x = (x_1, \dots, x_M)$  e un vettore di output  $y = (y_1, \dots, y_S)$ , la *reference technology* può essere espressa in termini di *output correspondence*  $P$ :

$$P: R_+^M \rightarrow P(x) \subseteq R_+^S$$

dove  $P(x)$  racchiude tutti i vettori di output  $y$  producibili dal vettore di input  $x$ , oppure equivalentemente può essere espressa in termini di *input correspondence*  $L$ :

$$L: R_+^S \rightarrow L(y) \subseteq R_+^M$$

dove  $L(y)$  racchiude tutti i vettori di input  $x$  in grado di produrre l'output  $y$ .

L'input e l'output *corrispondence*,  $L(y)$  e  $P(x)$ , nelle valutazioni con DEA, sono l'insieme ammissibile del problema di ottimizzazione. L'insieme ammissibile di DEA si basa su

nove assiomi (Färe, Grosskopf, 1994) che vengono di seguito enunciati per  $P(x)$ , ma valgono anche per  $L(y)$ :

#### Assioma 1

$$(a) 0 \in P(x), \forall x \in R_+^M \quad (b) y \notin P(0), y \geq 0$$

La parte (a) afferma che qualsiasi livello di input impiegato può produrre anche 0. Quindi è ammessa sia l'inattività sia la possibilità di fermare la produzione. La parte (b) afferma che non è possibile produrre qualcosa con zero input.

#### Assioma 2

$$\forall x_1, x_2 \in R_+^M, x_2 \geq x_1, P(x_1) \subseteq P(x_2)$$

È la *strong disposability* dell'input, afferma che se almeno un elemento del vettore di input aumenta ( $x_2 \geq x_1$ ), l'output *corrispondence* non può diminuire, nel senso che il vecchio  $P(x_1)$  è incluso nel nuovo  $P(x_2)$ .

#### Assioma 3

$$\forall x \in R_+^M, y \in P(x) \text{ e } 0 \leq y' \leq y \Rightarrow y' \in P(x)$$

È la *strong disposability* dell'output, afferma che se il vettore di input  $x$  può produrre il vettore di output  $y$ , lo stesso input può produrre qualsiasi vettore di output  $y'$  che abbia anche un solo elemento minore di  $y$  ( $y' \leq y$ ).

#### Assioma 4

$$\forall x \in R_+^M, P(x) \text{ è delimitata}$$

La delimitazione di  $P(x)$  in termini economici vuol dire che con input finiti si possono produrre solo output finiti, quindi  $P(x)$  non è infinito se  $x$  non è infinito.

#### Assioma 5

$P$  è chiusa

$P$  è chiusa nel senso che se  $x^l \rightarrow x^0, y^l \rightarrow y^0$  e  $y^l \in P(x^l) \forall l$ , allora  $y^0 \in P(x^0)$ , questo implica che per ogni  $x \in R_+^M$ , l'output set  $P(x)$  è un insieme chiuso, quindi esiste una frontiera tecnologica. L'assioma 5 insieme al 4 implica che l'output *corrispondence* è compatto (chiuso e limitato) in  $R_+^M$ .

### Assioma 6

se  $y \in P(x), y \geq 0, \Rightarrow \forall \theta \geq 0 \exists \lambda \geq 0 : \theta y \in P(\lambda x)$

Se un vettore semipositivo di output  $y$  è producibile da un vettore di input  $x$ , ogni suo scalare  $\theta y$  può essere prodotto scalando l'input  $\lambda x$ .

### Assioma 7

$\forall x \in R_+^N, P(x)$  è convesso

Nel senso che  $\forall y_1, y_2 \in P(x), 0 \leq \theta \leq 1, [\theta y_1 + (1 - \theta)y_2] \in P(x)$ . Vale a dire che se  $x$  può produrre  $y_1$  e  $y_2$ , può produrre anche una tutte le combinazioni lineari convesse tra  $y_1$  e  $y_2$ .

### Assioma 8

$P$  è quasi - concavo

Questo implica che  $\forall x_1, x_2 \in R_+^M, 0 \leq \theta \leq 1, P(x_1) \cap P(x_2) \subseteq P[\theta x_1 + (1 - \theta)x_2]$ . Se  $x_1$  e  $x_2$  hanno lo stesso numero di elementi tutti positivi, la quantità di output che sono in grado di produrre entrambi (l'intersezione tra  $P(x_1)$  e  $P(x_2)$ ) è un minore o uguale alla quantità di output che possono produrre tutte le combinazioni lineari convesse tra  $x_1$  e  $x_2$ .

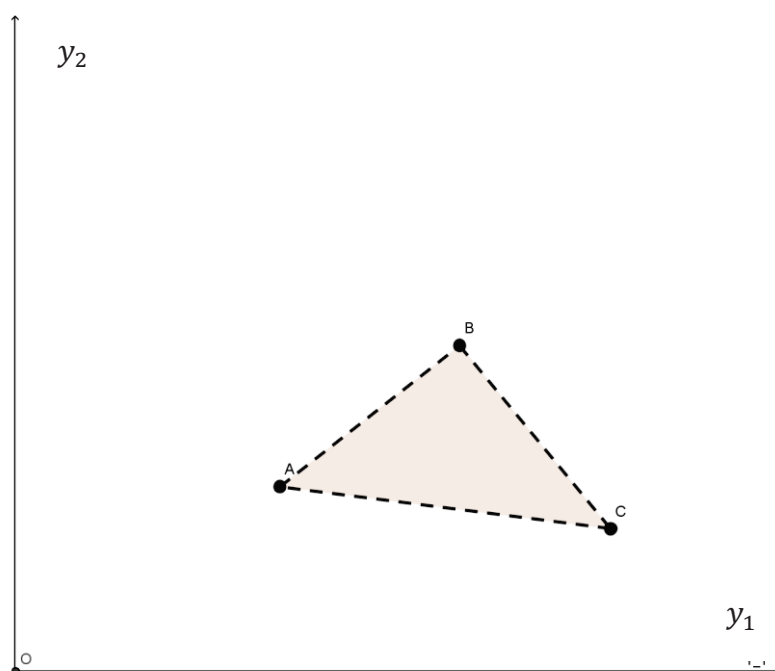
### Assioma 9

$P$  è concavo

Questo implica che  $\forall x_1, x_2 \in R_+^M, 0 \leq \theta \leq 1, \theta P(x_1) + (1 - \theta)P(x_2) \subseteq P[\theta x_1 + (1 - \theta)x_2]$ . Se  $x_1$  e  $x_2$  hanno lo stesso numero di elementi tutti positivi, tutte le combinazioni lineari delle quantità di output che sarebbero in grado di produrre singolarmente, sono minori o uguali delle quantità di output producibili dalle combinazioni lineari convesse dei due input.

Gli ultimi tre Assiomi (7, 8 e 9) modellano varie proprietà di convessità. Al fine di comprenderne il significato si può osservare la figura 1, dove sono rappresentate tre aziende (A, B e C), che utilizzano lo stesso quantitativo di input per produrre vari livelli di due output  $(y_1, y_2)$ . Sulla base dei tre assiomi di convessità (7, 8 e 9), è parte dell'insieme ammissibile tutta l'area compresa nel triangolo (ABC).

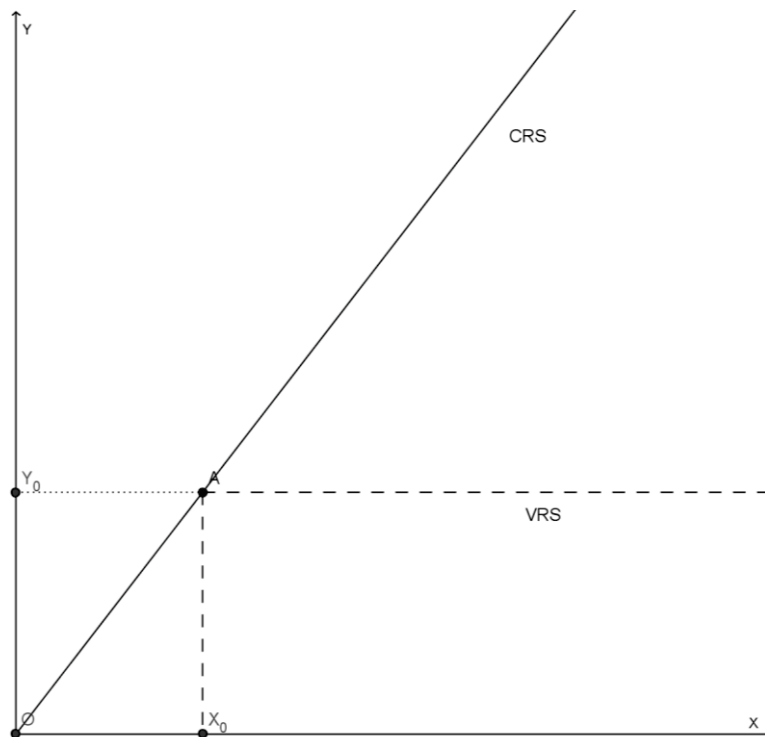
**FIG. 1 Convessità**



Nel caso semplificato di una azienda (A), che produce un vettore di output  $y_0$ , impiegando un vettore di input  $x_0$ , la *reference technology* basata sugli *Assiomi 1, ..., 9* può essere rappresentata su due dimensioni come in figura 2.

In figura 2 la *reference technology* per A, include tutte le produzioni possibili perché esiste A di coordinate  $(x_0, y_0)$ , quindi  $P(x)$  o equivalentemente  $L(y)$ , basate su  $P(x_0)$  che è il segmento  $(x_0A)$  e  $L(y_0)$  che è la semiretta  $(A, +\infty)$ . In termini concreti, sulla base degli *Assiomi 1, ..., 9*, con  $x_0$  è possibile produrre qualsiasi quantità di output che sia inferiore a  $y_0$ , allo stesso tempo è possibile produrre  $y_0$  con qualsiasi quantità di input superiore a  $x_0$ .

**FIG. 2: reference technology di A**



La *reference technology*  $L(y)$  o  $P(x)$  rappresentata in figura 2 ha due varianti:

1. a rendimenti costanti (CRS), dove si assume che  $P(\lambda x) = \lambda P(x), \lambda \geq 0$  (all'aumentare dell'input l'output debba aumentare proporzionalmente), in questo caso  $L(y)$  o  $P(x)$  è tutta l'area sotto la semiretta che dall'origine passa per A;
2. a rendimenti variabili (VRS), dove si assume che all'aumentare dell'input non è noto di quanto aumenti l'output, in questo caso  $L(y)$  o  $P(x)$ , equivale a  $L(y_0)$  o  $P(x_0)$  ed è tutta l'area sotto la semiretta che da A prosegue a destra parallela all'asse delle ascisse.

In termini di modelli a tratti lineari, due variabili  $(x, y)$  fanno parte della *reference technology* VRS in figura 2 se:

$$T_{VRS} = \{(x, y): y \leq y_0, x \geq x_0\} \quad (4)$$

due variabili  $(x, y)$  fanno parte della *reference technology* CRS in figura 2 se:

$$T_{CRS} = \{(x, y): y \leq y_0 \lambda, x \geq x_0 \lambda, \lambda \geq 0\} \quad (5)$$

Dove  $\lambda$  è il vettore di intensità, che rappresenta tutti i livelli ai quali può essere intrapresa l'attività di A. Aggiungendo all'esempio precedente una seconda azienda, B



di coordinate  $(x_1, y_1)$ , sulla base degli *Assiomi 1, ..., 9* la *reference technology* può essere rappresentata sullo stesso grafico come in figura 3.

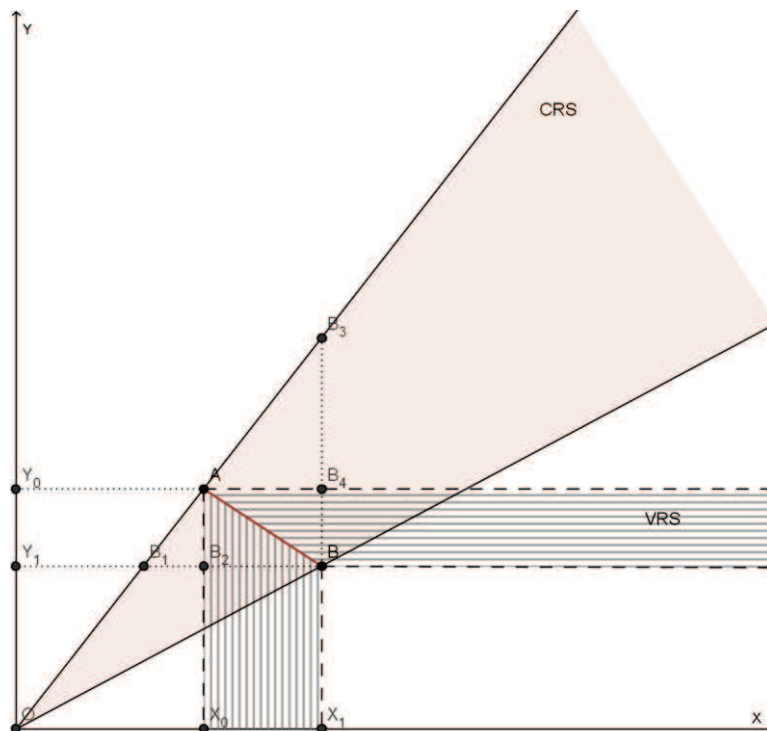
In questo caso, la *reference technology* in CRS è fatta da tutte le combinazioni lineari tra A e B (ovvero lo spazio in rosa tra le due semirette, quella per A e quella per B) e tutta l'area sottostante. In VRS, invece, la *reference technology* è fatta da tutte le combinazioni lineari convesse tra A e B (ovvero il segmento rosso che unisce A e B), e tutta l'area sotto le infinite semirette possibili che partono da un punto sul segmento AB e proseguono, verso destra, parallele all'asse delle ascisse. In termini di modelli a tratti lineari, due variabili  $(x, y)$  fanno parte della *reference technology* VRS per A e B se:

$$T_{VRS} = \{(x, y): y \leq (y_0\lambda_A + y_1\lambda_B), x \geq (x_0\lambda_A + x_1\lambda_B), (\lambda_A + \lambda_B) = 1, \lambda_A \geq 0, \lambda_B \geq 0\} \quad (6)$$

due variabili  $(x, y)$  fanno parte della *reference technology* CRS per A e B se:

$$T_{CRS} = \{(x, y): y \leq (y_0\lambda_A + y_1\lambda_B), x \geq (x_0\lambda_A + x_1\lambda_B), \lambda_A \geq 0, \lambda_B \geq 0\} \quad (7)$$

**FIG 3. reference technology di A e B**



Occorre notare che le *reference technology* rappresentate in figura 3 o la (6) e la (7), racchiudono lo stesso spazio delle *reference technology* in figura 2 o la (4) e la (5), che è lo spazio sotto l'azienda più produttiva in termini di (1), che in questo caso è A.

Per tali caratteristiche la *reference technology* basata sugli assiomi (1,...,9) è alla base delle valutazioni con DEA, che misura l'efficienza in base alla distanza tra i confini della *reference technology*, chiamata frontiera di efficienza (in figura 3 in VRS è il segmento  $(x_0, A)$  e la semiretta che da A prosegue parallela alle ascisse, in CRS è la semiretta che dall'origine passa per A) e la posizione dell'azienda analizzata (che potrebbe essere il punto B). Con DEA chi sta sulla frontiera è efficiente al 100% (perché è l'azienda più produttiva), chi sta sotto ha una inefficienza che può essere espressa in vari modi, ma non è altro che la distanza dalla frontiera.

Con una valutazione VRS input *oriented* (minimizzando i costi), B verrebbe proiettata in  $B_2$ , con un indice di efficienza di:

$$VRS_{IO} = \frac{Y_1 B_2}{Y_1 B}$$

Oppure verrebbe proiettata in  $B_4$  con un VRS output *oriented* (massimizzando i ricavi), con un indice di efficienza di:

$$VRS_{OO} = \left( \frac{X_1 B_4}{X_1 B} \right)^{-1}$$

Con una valutazione CRS input *oriented* B verrebbe proiettata in  $B_1$ , con un indice di efficienza di:

$$CRS_{IO} = \frac{Y_1 B_1}{Y_1 B}$$

Oppure verrebbe proiettata in  $B_3$  con un CRS output *oriented*, con un indice di efficienza di:

$$CRS_{OO} = \left( \frac{X_1 B_3}{X_1 B} \right)^{-1}$$

Nell'esprimere la *reference technology* in termini di modelli a tratti lineari l'unica differenza tra la versione VRS (6) e la CRS (7) è il vincolo di convessità dei coefficienti  $(\lambda_A + \lambda_B) = 1$  che per  $n = 1, \dots, N$  aziende è:

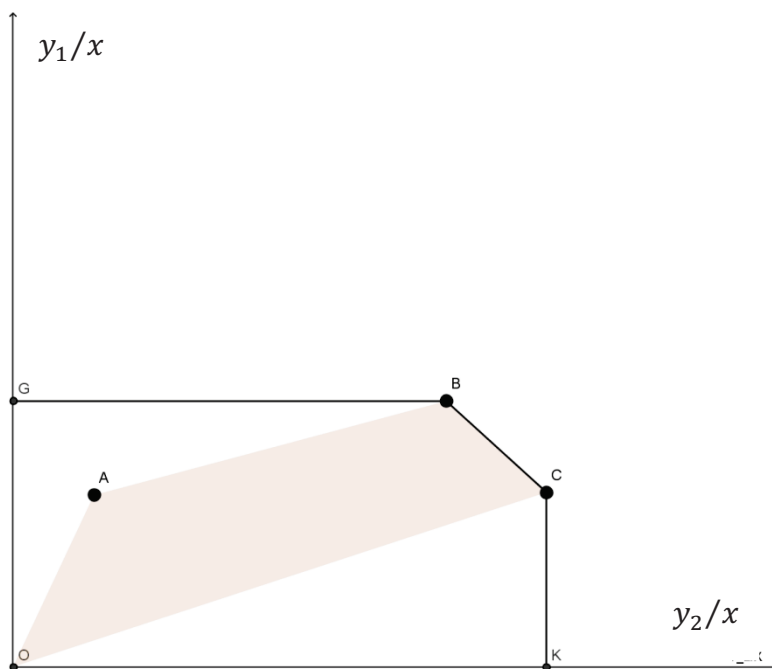
$$\sum_{n=1}^N \lambda_i = 1 \quad (8)$$

La valutazione DEA in versione CRS è più selettiva di quella VRS perché, come si può osservare nella figura 3, la frontiera CRS tende ad essere più lontana dalle aziende. L'indice di efficienza CRS è per questo motivo sempre minore o uguale di quello VRS. La versione VRS ha delle proprietà importanti, una è, sotto certe restrizioni, l'invarianza rispetto alla traslazione degli assi (Pastor, 1996), l'altra è, sempre sotto certe restrizioni, la possibilità di inserire contemporaneamente dati positivi e negativi (Sahoo *et al.* 2011).

Quando gli input e gli output sono molteplici l'unica *reference technology* che può essere rappresentata su due dimensioni è quella CRS, quindi, solo per una convenienza rappresentativa, da questo punto poi tutte le *reference technology* raffigurate sono in CRS.

In presenza di due output  $(y_1, y_2)$ , un input  $(x)$  e tre aziende (A, B e C), la *reference technology* si può rappresentare su due dimensioni ponendo sulle ascisse  $y_2/x$  e sulle ordinate  $y_1/x$ , come in figura 4.

**FIG. 4 reference technology con due output**



Costruendo una *reference technology* che rispetta gli *Assiomi 1,...,9*, le possibilità produttive nella figura 4 sono le combinazioni lineari, con somma dei coefficienti minore o uguale a uno, degli output prodotti dalle 3 aziende (l'area in rosa), poiché è possibile produrre lo stesso output  $(y_1, y_2)$  di A, B e C utilizzando più

input (*Assioma 2*), oppure è possibile, a parità di input, produrre ogni restringimento radiale di output  $(\theta y_1, \theta y_2)$  con  $0 \leq \theta \leq 1$ .

È, inoltre, parte della *reference technology* l'area a sinistra di O, A, B, perché con una con la stessa quantità di input si può produrre anche meno  $y_2$ , e l'area sotto O, C perché con la stessa quantità di input si può produrre anche meno  $y_1$  (*Assioma 3*). La *reference technology* è quindi tutta l'area dentro G, B, C, K, che è una curva di trasformazione che passa per B e C, che sono le aziende più produttive, dove la produttività è quella in (1).

In termini di modelli a tratti lineari tre variabili  $(x, y_1, y_2)$  fanno parte della *reference technology* in figura 4 se:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} (x, y_1, y_2): \\ y_1 \leq (y_{1A}\lambda_A + y_{1B}\lambda_B + y_{1C}\lambda_C), \\ y_2 \leq (y_{2A}\lambda_A + y_{2B}\lambda_B + y_{2C}\lambda_C), \\ x \geq (x_A\lambda_A + x_B\lambda_B + x_C\lambda_C), \\ \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \geq 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

In termini di modelli a tratti lineari, la generalizzazione della (9) per  $n = 1, \dots, N$  aziende che producono con input  $x_n$  (con  $m = 1, \dots, M$  numero di input), output  $y_n$  (con  $s = 1, \dots, S$  numero di output), è la (10):

$$T = \left\{ (x, y) y_s \leq \sum_{n=1}^N y_{ns}\lambda_n, s = 1, \dots, S, x_m \geq \sum_{n=1}^N x_{nm}\lambda_n, m = 1, \dots, M, \lambda_n \geq 0, n = 1, \dots, N \right\} \quad (10)$$

La (10) può essere scritta in forma matricale introducendo la matrice  $X$  di dimensioni  $(M \times N)$ , che ha tutti gli input osservati, la matrice  $Y$  di dimensioni  $(S \times N)$ , che ha tutti gli output osservati e il vettore  $\lambda$  di dimensioni  $(N \times 1)$ .

$$T = \{(x, y) y \leq Y\lambda, x \geq X\lambda, \lambda \geq 0, \lambda \in R_+^N\} \quad (11)$$

Come mostrano Färe e Grosskopf (1994), su una *reference technology*, come quella rappresentata in figura 4, si può imporre la *weak* o la *strong disposability* dell'output. Questo è un punto molto importante per la valutazione dell'eco-efficienza poiché una buona parte della letteratura, a partire da Färe *et al.* (1989), ritiene che il *bad* output, essendo un sottoprodotto di una scelta tecnologica, sia un output *weak disposable*, nel senso che non può essere ridotto senza costi, come può accadere per un *good* output.

Imporre la *weak disposability* dell'output vuol dire sostituire l'Assioma 3, con il seguente

*Assioma 3w*

$$\forall x \in R_+^M, y \in P(x), 0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow \theta y \in P(x)$$

Se il vettore di input  $x$  può produrre il vettore di output  $y$ , lo stesso input può produrre anche il vettore  $\theta y$ , con  $0 \leq \theta \leq 1$ , dove tutti gli elementi sono scalati per lo stesso fattore. La differenza tra l'Assioma 3 e l'Assioma 3w, è che nel secondo caso lo stesso  $x$  non può produrre qualsiasi  $y' \leq y$  (dove  $y'$  potrebbe avere anche un solo elemento minore di  $y$ ), ma solo  $y$  quando tutti gli elementi sono scalati di  $0 \leq \theta \leq 1$ .

L'Assioma 3w con  $(y_1, y_2)$  prodotti da un solo input  $x$ , impone che laddove  $(y_1, y_2)$  appartenga alle possibilità produttive di  $x$ , alle stesse possibilità produttive appartiene solo ogni restringimento radiale di  $(y_1, y_2)$  con  $(\theta y_1, \theta y_2) \leq (y_1, y_2)$ . Questo in figura 4 è solo l'area in rosa. Se, per esempio, per dato input (1 mq di terra) è possibile produrre 10 carote e 10 kg di pesticidi, con lo stesso input è possibile produrre 8 carote e 8 kg di pesticidi, ma non è possibile produrre 10 carote e 8 kg di pesticidi. L'Assioma 3, invece, laddove  $(y_1, y_2)$  appartiene alle possibilità produttive di  $x$ , ammette che qualsiasi  $(y_1, y_2)' \leq (y_1, y_2)$  appartenga alle stesse possibilità produttive. Nell'esempio precedente è possibile ridurre solo un output alla volta lasciando invariato l'input.

In presenza di un *good* e un *bad* output gli approcci per la costruzione della *reference technology* sono 2:

1. l'approccio di Färe *et al.* (1989) che tratta il *bad* output come un output, e costruisce una *reference technology* dove il *bad* rispetta l'Assioma 3w, approccio *weak disposable*, (da ora approccio WD),
2. l'approccio che tratta il *bad* output come input, denominato approccio *strong disposable* (da ora approccio SD).

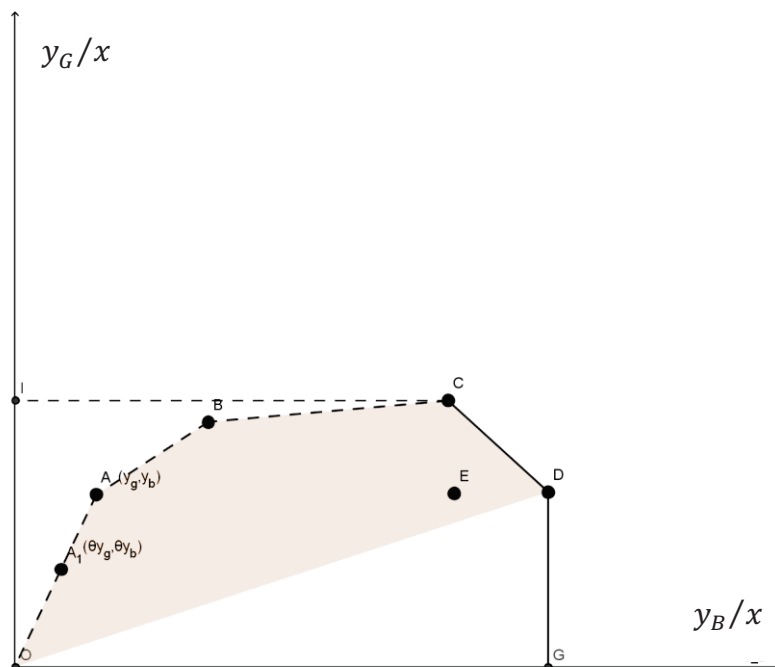
## 2. Approccio WD

### a. *reference technology WD*

L'approccio WD tratta il *bad* output come un output, quindi la *reference technology* di riferimento non si discosta molto da quella convenzionale (figura 2, 3 e 4). Graficamente, nel caso in cui con lo stesso ammontare di input siano prodotti due

output, la si può rappresentare ponendo  $y_G$  sulle ordinate e  $y_B$  sulle ascisse (come in figura 5). In figura 5 ci sono 5 aziende (A, B, C, D, E), che usano lo stesso quantitativo di  $x$  per produrre varie combinazioni di  $(y_G, y_B)$ .

**FIG. 5 reference technology WD**



Costruendo una *reference technology* che rispetta gli *Assiomi 1, ..., 9*, come quelle in figura 2, 3 e 4, le possibilità produttive nella figura 5 sono dentro (I, C, D, G).

Il primo studio che usa DEA per stimare l'eco-efficienza, Färe *et al.* (1989), scrive una apposita *reference technology*, dove assume che laddove il vettore  $y$  contenga due output:  $y = (y_G, y_B)$ , il primo *good* e il secondo *bad*, tutto il vettore  $y$  sia soggetto all'Assioma 3w e solo il *good* sia soggetto all'Assioma 3:

$$(y_G, y_B) \in P(x) \Rightarrow (y_G', y_B) \in P(x), \forall y_G' \leq y_G \quad (12)$$

La (12) esprime che se  $(y_G, y_B)$  appartengono alle possibilità produttive di  $x$ , a parità di altre condizioni, solo ogni  $y_G'$  minore o uguale di  $y_G$  appartiene alle stesse produttività produttive. Con la stessa tecnologia, a parità di input, è possibile produrre meno *good* output, ma, lasciando il *good* invariato, non è possibile produrre meno *bad* output.

Questa scelta è motivata da uno lavoro sull'eco-efficienza di Pittman (1983), egli non usa DEA, il quale nota che a parità di capital stock (input), ogni incremento del capitale destinato a ridurre il *bad* output, comporta inevitabilmente una riduzione del *good* output.

Färe *et al.* (1989) introduce così la *reference technology* WD usata in tutti i modelli DEA WD, che in termini di modelli a tratti lineari si esprime come:

$$T^I = \{(x, y_G, y_B) : y_G \leq Y_G \lambda, y_B = Y_B \lambda, X \lambda \leq x, \lambda \in R_+^K\} \quad (13)$$

Il vincolo  $y_G \leq Y_G \lambda$  esprime la strong disposability del *good* output, il vincolo  $x \geq X \lambda$  esprime la strong disposability dell'input e il vincolo  $y_B = Y_B \lambda$  esprime la weak disposability del *bad* output.

Quello che cambia tra la (13) e la (11) è rappresentato graficamente in figura 5, dove costruendo una *reference technology* come la (11), le possibilità produttive sono tutte le combinazioni lineari, con coefficiente minore o uguale di uno, degli output delle 5 aziende (l'area in rosa per  $x \geq X \lambda$ ), in più l'area a sinistra di (O, A, B, C) e l'area sotto (O, D), grazie al vincolo  $y \leq Y \lambda$ . Costruendo invece una *reference technology* come la (13) le possibilità produttive in figura 5 sono tutte le combinazioni lineari, con coefficiente minore o uguale di uno, degli output delle 5 aziende (l'area in rosa per  $x \geq X \lambda$ ), in più l'area sotto OD (grazie al vincolo  $y_G \leq Y_G \lambda$ ), ma l'area a sinistra di O, A, B, C è esclusa per il vincolo  $y_B = Y_B \lambda$ .

La *reference technology* WD, espressa in termini di modelli a tratti lineari nella (13), in figura 5 è O, A, B, C, D, G.

La riflessione di Pittman (1983) che sta alla base della *reference technology* WD di Färe *et al.* (1989) è così rispettata: dal momento che  $y_B$  non può essere ridotto senza costi, in figura 5 dal punto A, non si può andare orizzontalmente a sinistra fino ad azzerare l'output *bad* ( $y_B = 0$ ), a meno che non si azzeri anche l'output *good* ( $y_G = 0$ ).

Come si può notare in figura 5 i confini della *reference technology* WD (O, A, B, C, D, G) passano per tutte le aziende più produttive nel senso della (3), quindi anche per quella che produce (a parità di input) più *bad* output di tutti. Dal momento che i confini della *reference technology* rappresentano la frontiera di efficienza, i modelli DEA WD hanno il limite di considerare 100% efficiente anche l'azienda più inquinante.

Nell'esempio, infatti, l'azienda D, che a parità di input produce meno *good* output di C e più *bad* output di tutti, risulta sulla frontiera.

## b. modelli WD

Sulla base della nuova *reference technology* WD, in Färe *et al.* (1989) si presenta il primo metodo DEA con *bad* output (14):

$$\begin{aligned} & \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\ & \sigma y_{G\_R} - Y_G \lambda \leq 0 \\ & \frac{1}{\sigma} y_{B\_R} - Y_B \lambda = 0 \\ & X \lambda - x_R \leq 0 \\ & \lambda \geq 0; \sigma \text{ free} \end{aligned} \quad (14)$$

Dove il pedice *R* è posto ai vettori con i dati dell'azienda di riferimento; in questo problema di ottimizzazione massimizzando il valore di  $\sigma$ , l'azienda di riferimento è proiettata ai confini della *reference technology* WD (sulla frontiera di efficienza). Gli elementi di novità rispetto a una convenzionale DEA sono due:

1. la stretta uguaglianza sul *bad* output:

$$\frac{1}{\sigma} y_{B\_R} - Y_B \lambda = 0$$

che esprime la *weak disposable reference technology*;

2. la posizione di  $\sigma$ , che permette allo stesso tempo di massimizzare il *good* output e minimizzare *bad* output.

Il programma non è lineare poiché la variabile  $\sigma$  sta al denominatore, Frare *et al.* (1989) lo linearizzano con l'uguaglianza:

$$\frac{1}{\sigma} = 2 - \sigma$$

che rende il (14) lineare nell'equivalente versione (15):

$$\begin{aligned} & \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\ & \sigma y_{G\_R} - Y_G \lambda \leq 0 \\ & 2y_{B\_R} - \sigma y_{B\_R} - Y_B \lambda = 0 \\ & X \lambda - x_R \leq 0 \\ & \lambda \geq 0; \sigma \text{ free} \end{aligned} \quad (15)$$

Il secondo metodo WD è introdotto da Färe e Grosskopf (2003):



$$\begin{aligned}
& \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\
& \sigma Z_G + y_{G,R} - Y_G \lambda \leq 0 \\
& -\sigma Z_B + y_{B,R} - Y_B \lambda = 0 \\
& X\lambda - x_R \leq 0 \\
& \lambda \geq 0; \sigma \text{ free}
\end{aligned} \tag{16}$$

Il (16) misura contemporaneamente la riduzione possibile del *bad* e l'espansione possibile dei *good* output attraverso la *Proportional distance function* di Farrel (1957). Sulla base della terminologia di Färe e Grosskopf (2003)  $Z_G$  e  $Z_B$  sono i *directional vectors*, rappresentano rispettivamente quanto è possibile incrementare il *good* e quanto è possibile ridurre il *bad* output, rispetto alla frontiera WD. Al fine di ottenere l'inefficienza in termini dello stesso fattore, quindi espressa da indicatore compreso tra 0 e 1, dove 1 equivale al 100% di inefficienza, si può sostituire nel programma (16)  $y_{G,R} = Z_G$  e  $y_{B,R} = Z_B$ . In questo modo  $\sigma$  esprime, in termini  $(0, \dots, 1)$ , l'espansione del *good* e la riduzione del *bad* output che renderebbero l'azienda efficiente. In questo caso  $\sigma$  esprime l'inefficienza relativa.

L'ultimo modello WD è:

$$\begin{aligned}
& \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\
& \sigma y_{G,R} - Y_G \lambda \leq 0 \\
& y_{B,R} - Y_B \lambda = 0 \\
& X\lambda - x_R \leq 0 \\
& \lambda \geq 0; \sigma \text{ free}
\end{aligned} \tag{17}$$

La massimizzazione di  $\sigma$  misura, a parità di altre condizioni, quanto *good* output dovrebbe produrre l'azienda di riferimento per essere efficiente.

Per illustrare graficamente i risultati dei modelli WD si prende il database in Tabella 1 in cui dieci aziende: A, B, C, D, E, F, G, H, I e J producono con un input un *good* e un *bad* output.

TAB. 1. Dataset

Azienda	Input (X)	Output (Y <sub>G</sub> )	Output (Y <sub>B</sub> )
<b>A</b>	16	2	2
<b>B</b>	15	3	6
<b>C</b>	3	1,5	7,5
<b>D</b>	28	4	32
<b>E</b>	12	2	7
<b>F</b>	24	6	24
<b>G</b>	4	1,2	14
<b>H</b>	40	8	48
<b>I</b>	35	5	10
<b>J</b>	14	4	28

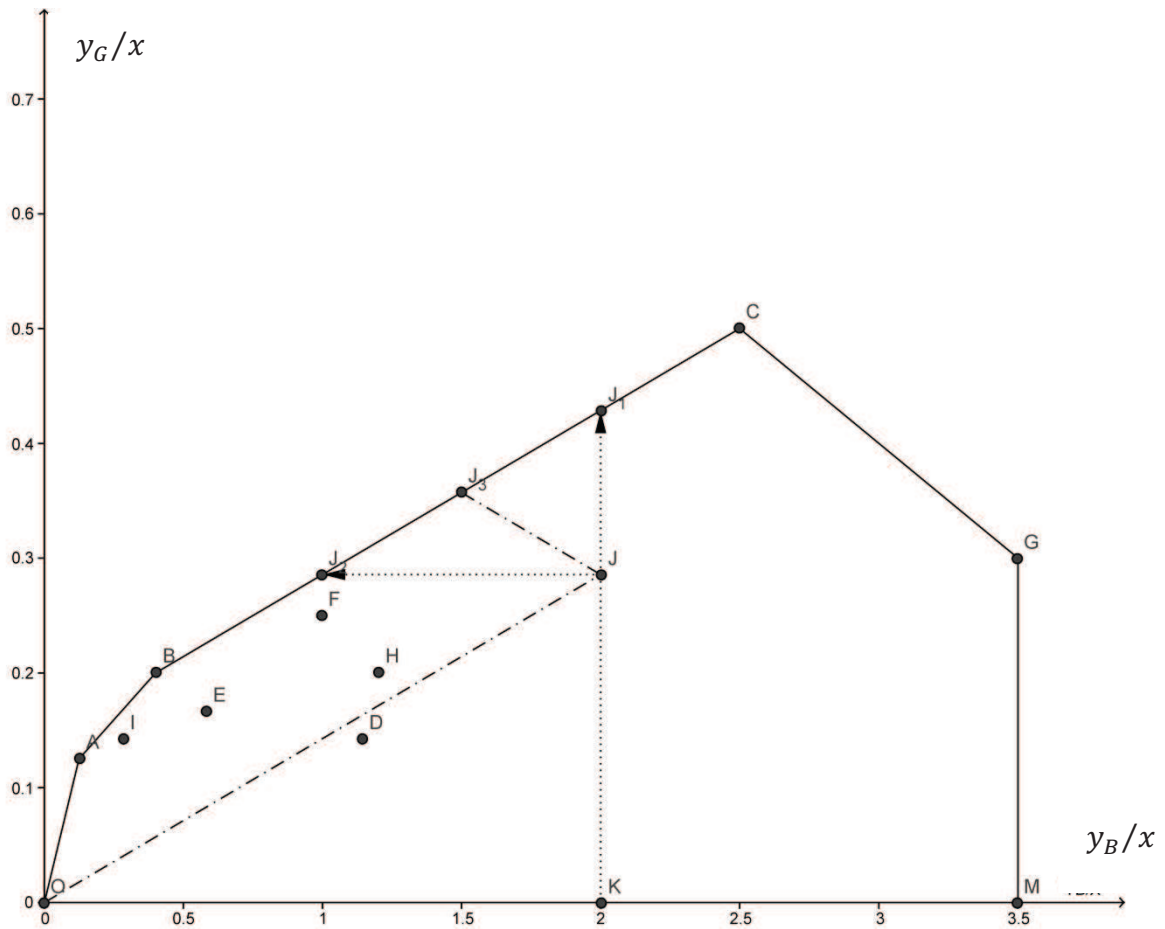
Fonte Sahoo *et al.* (2011) p. 755

La figura 6 mostra un grafico in cui sulle ascisse è posto  $y_B/x$  e sulle ordinate  $y_G/x$ , nel quale è rappresentata la *reference technology* WD per i dati in Tabella 1. Ai confini della *reference technology* WD (sulla frontiera di efficienza) ci sono le aziende A, B, C, e G.

Usando DEA in versione (17), che stima, a parità d'altre condizioni, di quanto l'azienda inefficiente dovrebbe aumentare il *good* output, l'azienda J, che è inefficiente, sarebbe proiettata sul punto  $J_1$  dove otterrebbe un punteggio di efficienza pari a:

$$\frac{1}{\sigma_{(17)}} = \left( \frac{KJ_1}{KJ} \right)^{-1} = \frac{1}{1,499} = 0,67$$

**FIG. 6 frontiera WD con dati in tabella 1**



Usando invece la DEA in versione (15) e in versione (16), presentate da Färe *et al.* (1989) e Färe e Grosskopf (2003), che stimano, a parità di input, quanto è possibile contemporaneamente ridurre il *bad* output e aumentare il *good* output, l'azienda inefficiente J sarebbe proiettata sul punto  $J_3$ , che è il punto d'incontro tra il vettore somma di  $(\overrightarrow{JJ_1} + \overrightarrow{JJ_2})$  e la frontiera, dove il punteggio di efficienza è:

$$\frac{1}{\sigma_{(16)}} = \frac{1}{1 + \sigma_{(17)}} = \left( \frac{OJ}{OJ + JJ_3} \right) = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

Come si può osservare il forte limite dei modelli WD è che G, azienda che (a parità di input) produce più *bad* output di tutti, senza allo stesso tempo produrre più *good* output, risulta sulla frontiera.

### 3. Approccio SD

#### a. *reference technology* SD

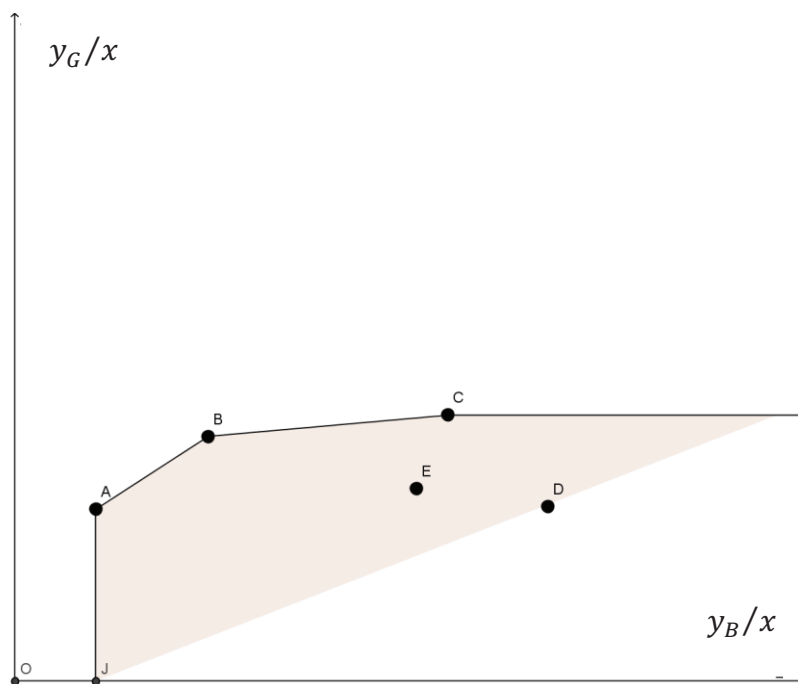
Con l'intento dichiarato di superare il forte limite dei modelli WD, ovvero l'avere l'azienda che produce con più *bad* output di tutti sulla frontiera, negli anni 2000 prende piede un approccio che tratta il *bad* output come input, chiamato approccio SD.

La *reference technology* SD in termini di modelli a tratti lineari è la (18):

$$T^{II} = \{(x, y_G, y_B) : y_G \leq Y_G \lambda, y_B \geq Y_B \lambda, X \lambda \leq x, \lambda \in R_+^K\} \quad (18)$$

nella quale i *bad* output hanno lo stesso vincolo degli input. La rappresentazione grafica della *reference technology* SD è in figura 7, dove per le 5 aziende (A, B, C, D, E), già rappresentate in figura 5, le possibilità produttive sono le combinazioni lineari delle 5 aziende (l'area in rosa) per le quali a parità o con più input ( $x$  e  $y_B$ ) è possibile produrre la stessa quantità dell'unico output  $y_G$ , in più tutta l'area a destra di D che vuol dire a parità o con più ( $x$  e  $y_B$ ) si può produrre anche meno  $y_G$ . Si può notare che aver messo un output negli input ha reso la *reference technology* più simile a una funzione di produzione che a una curva di trasformazione. Come è evidente in questo modo D non è più sulla frontiera.

**FIG. 7** *reference technology* SD



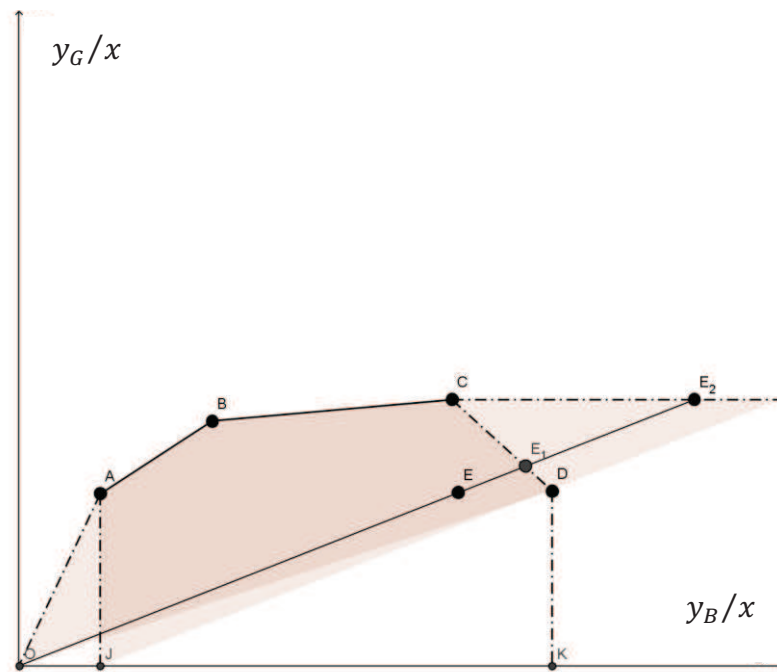
Confrontando le figure 4 e 6 emerge che la frontiera WD racchiude un'area più piccola rispetto a quella SD, infatti l'inefficienza misurata con metodi WD di solito è inferiore a quella misurata con metodi SD (Hailu, Veeman, 2001). Si osserva inoltre che la frontiere WD non è proprio un sottoinsieme di quella SD poiché la WD comprende anche l'area O, A, J.

La differenza è nelle combinazioni lineari (l'area in rosa), infatti mettendo  $y_B$  e  $y_G$  nell'output, come in Figura 5, la *reference technology* è fatta da tutte le combinazioni lineari con somma dei coefficienti minore o uguale di 1, perché in base all'Assioma 2 è possibile produrre (A, B, C, D, E) con lo stesso o anche con più input  $x$ . Mettendo invece  $y_B$  tra gli input, in base all'Assioma 2 è sempre possibile produrre (A, B, C, D, E) con lo stesso o anche con più  $x$ , ma con lo stesso o anche con più  $y_B$  (che è un altro input), quindi a sinistra di  $y_B$  (dove c'è meno input) non è possibile produrre (A, B, C, D, E). La *reference technology* si ferma così a  $y_B=A$ , che è il minimo. Allo stesso modo si spiega l'area in rosa a destra di C, D dove, sulla base dell'Assioma 2 è possibile produrre (A, B, C, D, E) con lo stesso o anche con più  $y_B$  (che è un input).

Trattare i *bad* output come input è una forzatura che gli ideatori dell'approccio SD giustificano nel modo seguente: "per ridurre il *bad* output ci sono dei costi (di abbattimento) che per essere sostenuti necessitano l'utilizzo di input prima destinati alla produzione di *good* output" (Sahoo *et al.*, 2011, p. 751). Come si può notare il ragionamento di Pittman (1983), ripreso da Färe *et al.* (1989), alla base dell'approccio WD, esce dalla porta ed entra dalla finestra con i modelli SD.

C'è stato un intenso dibattito sulla questione (Hailu e Veeman, 2001; Färe e Grsosskopf, 2003; Hailu, 2003) che è nato dopo il metodo SD presentato da Hailu, Veeman (2001).

**FIG. 8 proiezioni impossibili**



Il metodo di Hailu, Veeman (2001) è un input *oriented* basato sulla *reference technology* SD, come rappresentata in Figura 7. Färe e Grosskopf (2003) dimostrano che il metodo di Hailu, Veeman (2001) è incoerente rispetto alle leggi fisiche (e rispetto all'Assioma 4) con l'esempio in figura 8.

In figura 8 ci sono le solite 5 aziende (A, B, C, D, E), che con lo stesso livello di input  $x$  producono cinque diversi livelli di *good* e *bad* output. La *reference technology* WD, è l'area dentro l'unione dei punti O, A, B, C, D, K, mentre la *reference technology* SD, è l'area sotto A, B, C e l'area sotto la semiretta che da C prosegue parallela all'asse delle ascisse.

Si osserva che sul fronte dei *bad* output la *reference technology* WD non oltrepassa D, che è l'azienda che produce più *bad* output di tutti, mentre la *reference technology* SD sì. Il punto della controversia è proprio questo perché, in base all'Assioma 4, con input finiti è possibile produrre solo output finiti. L'Assioma 4 è rispettato con la *reference technology* WD dove il massimo possibile è il massimo osservato (D), ma non è rispettato dalla *reference technology* SD, dove il massimo possibile nella produzione di *bad* output non esiste, quindi ammette la possibilità, con input finiti, di produrre una quantità di *bad* output infinita.

Usando una *reference technology* SD se, come fa il modello di Hailu, Weeman (2001), si opera con valutazione un input *oriented*, l'azienda di riferimento, per

esempio E, è proiettata in  $E_2$ , un punto in cui, con lo stesso input di C e D, E dovrebbe produrre lo stesso *good* output di C e più *bad* output di D, questo è un punto che nella realtà non esiste, quindi la valutazione è fatta rispetto a qualcosa di irraggiungibile. Con una *reference technology* WD, invece, la proiezione input *oriented* di E sarebbe stata in  $E_1$ .

Dal momento che la *reference technology* SD non rispetta l'Assioma 4 sul *bad* output, è indispensabile che la funzione obiettivo del programma sia scritta in modo da non proiettare le aziende oltre il massimo *bad* output osservato.

### b. modelli SD

Il metodo SD presentato da Hailu, Veeman (2001), dal quale nasce il dibattito (Färe, Grosskopf, 2003 vs Hailu, 2003) si presenta con il programma (19):

$$\begin{aligned}
 & \min_{\theta, \lambda} \theta \\
 & y_{G\_R} - Y_G \lambda \leq 0 \\
 & y_{B\_R} - Y_B \lambda \geq 0 \\
 & X \lambda - \theta x_R \leq 0 \\
 & \lambda \geq 0; \theta \text{ free}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Il metodo è un input *oriented* e quindi stima, a parità di altre condizioni, l'input efficiente. Come si può notare il vincolo sui *bad* è lo stesso vincolo degli input, in questo modo la frontiera è fatta da chi con meno input:  $X \lambda \leq x_R$  e meno *bad* output:

$$Y_B \lambda \leq y_{B\_R} \tag{20}$$

produce più *good* output:  $Y_G \lambda \geq y_{G\_R}$ .

Il vincolo (20), l'oggetto del dibattito, nel momento in cui è minimizzato il coefficiente  $\theta$  permette alla proiezione dell'azienda di riferimento sulla frontiera, di produrre (a parità relativa di input) più *bad* output della più efficiente, andando contro l'Assioma 4 (Färe e Grosskopf, 2003).

Il primo metodo SD immune alla critica di Färe e Grosskopf (2003) è quello di Seiford e Zhu (2002). In questo modello i *bad* output sono trasformati come  $\tilde{y}_B = (-y_B + w) (> 0)$ . In un primo momento il *bad* output è reso negativo, in quanto rendere negativo un output equivale a trattarlo da input, poi è traslato di una costante  $w$ , tale che tutti *bad* trasformati siano sempre positivi. Questo artificio è fatto per poter operare con un semplice output *oriented*, in cui i *good* output siano espressi nella forma originale e i *bad* siano trasformati (quindi input). Rendere positivi i *bad* output

trasformati evita una problematica di DEA, che è avere output negativi nel fare un output *oriented* (l'output *oriented* è inevitabilmente imposto dalla critica di Färe e Grosskopf, 2003). La trasformazione fatta da Seiford e Zhu (2002), dal momento che prevede anche una traslazione di dati, necessita, nella valutazione, l'assunzione di rendimenti variabili (VRS), in quanto la VRS è l'unica versione DEA *translation invariant* (Pastor, 1996). La *reference technology* VRS si ottiene con l'aggiunta del vincolo (8) che in forma matriciale è  $e\lambda = 1$ . Il modello di Seiford e Zhu (2002) è il (21):

$$\begin{aligned}
 & \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\
 & \sigma y_{G\_R} - Y_G \lambda \leq 0 \\
 & \sigma \tilde{y}_{B\_R} - \tilde{Y}_B \lambda \leq 0 \\
 & X\lambda - x_R \leq 0 \\
 & e\lambda = 1 \\
 & \lambda \geq 0; \sigma \text{ free}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Il risultato esprime l'output *good* e *bad* trasformato efficiente. Il limite del modello (21) è che i risultati dipendono da  $w$ . Infatti sulla base delle definizioni fornite da Lovell, Pastor (1999) i risultati di un modello dopo una traslazione possono essere:

1. *Classification invariant*: le inefficienti restano inefficienti e le efficienti restano efficienti;
2. *Ordering invariant*: l'ordine dalla classifica (dalla più alla meno efficiente) rimane uguale;
3. *Solution invariant*: i punteggi restano gli stessi.

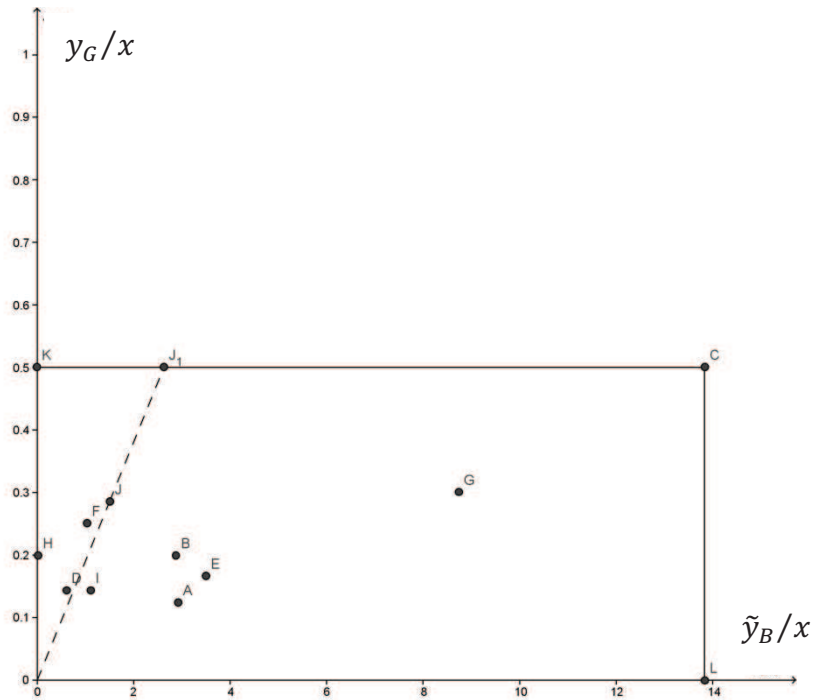
Questo modello in versione VRS ha solo la prima di queste caratteristiche, in versione CRS nessuna. La rappresentazione grafica del modello è in figura 9. Al fine di poter rappresentare su due dimensioni la Figura 9 è a rendimenti costanti, il grafico ha sulle ascisse  $\tilde{y}_B/x$  dove  $\tilde{y}_B = (-y_B + w) (> 0)$  e sulle ordinate  $y_G/x$ . Con i dati in Tabella 1, emerge subito che la frontiera è fatta solo da C (una prima bella differenza rispetto a un modello non traslato, come in figura 6), la proiezione di J sulla frontiera è  $J_1$ , il punteggio di J si ottiene da:

$$\frac{1}{\sigma_{(21)}} = \left( \frac{OJ_1}{OJ} \right)^{-1} = 0,57$$

Come si può notare G non è più efficiente, ma la traslazione ha inciso su tutta la valutazione, infatti anche gli autori Seiford e Zhu (2002), spiegano che il punteggio dipende dal valore che si sceglie di dare a  $w$ , in questo esempio è  $w = 49$ .



**Fig. 9** frontiera per  $\tilde{y}_B = (-y_B + w) (> 0)$



Korhonen e Luptacik (2004) propongono un modello che non ha il problema del (21) perché non ha  $w$ . Il modello Korhonen e Luptacik (2004) trasforma il *bad* in  $\tilde{y}_B = (-y_B)$  e stima, a parità di altre condizioni, solo l'aumento possibile del *good* output.

$$\begin{aligned}
 & \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\
 & \sigma Y_{G,R} - Y_G \lambda \leq 0 \\
 & \tilde{Y}_{B,R} - \tilde{Y}_B \lambda \leq 0 \\
 & X \lambda - x_R \leq 0 \\
 & \lambda \geq 0; \sigma \text{ free}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Il limite di questo modello è che misura solo l'efficienza nella produzione di *good* output, quindi potrebbe celare una eventuale inefficienza sul *bad* output. Trasformare il *bad* output in  $\tilde{y}_B = (-y_B)$  equivale esattamente a trattarlo da input (Sahoo *et al.* 2011), ma non permette di fare un output *oriented*, poiché la massimizzazione di  $\sigma$  proietterebbe l'azienda in direzione opposta della frontiera, per questo motivo il (22) si limita a fare un *good* output *oriented*. Inoltre non si può fare un input *oriented* con i vincoli della *reference technology* SD, perché proietterebbe l'azienda in punti soggetti alla critica di Färe e Grosskopf, 2003.

I modelli che seguono, dal (24) al (29) si basano tutti sulla trasformazione  $\tilde{y}_B = (-y_B)$  e cercano, in vari modi, di superare questi ostacoli.

Il primo è il *Range Directional Measure* (RDM) proposto da Portela *et al.* (2004). Questo modello parte dalla *Proportional distance function* di Farrel (1957), che è usata anche nel programma (16), e vuole rispondere a un problema già individuato da Farrell (1957), che è quando gli output assumono valori negativi.

Quando i dati sono strettamente positivi la scelta usuale è quella fatta con il programma (16), ovvero di assegnare ai *directional vectors* i valori dell'output o dell'input. In presenza di unità d'analisi che presentano fattori negativi Portela *et al.* (2004) introduce il punto:

$$I = (\max_n y_{ns}, s = 1, \dots, S, \min_n x_{nm}, m = 1, \dots, M) \quad (23)$$

Il punto  $I$  non è detto che esista nella realtà, esso rappresenta una azienda immaginaria che con il valore minimo di ogni input produce il massimo di ogni output. Questo punto serve a introdurre i *Range directional vectors*:

$$R_S = \max_n \{y_{ns}\} - y_{RS}, \quad s = 1, \dots, S$$

$$R_M = x_{Rm} - \min_n x_{nm}, \quad m = 1, \dots, M$$

$R_S$  e  $R_M$  sono i vettori con la distanza tra il punto  $I$  e l'azienda di riferimento, per come sono calcolati non possono mai assumere valori negativi, per questo  $R_S = (R_G, R_B)$  è usato come  $Z_G$  e  $Z_B$  nel programma (24):

$$\begin{aligned} & \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\ & \sigma R_{G_R} + y_{G_R} - Y_G \lambda \leq 0 \\ & \sigma R_{B_R} + \tilde{y}_{B_R} - \tilde{Y}_B \lambda \leq 0 \\ & X \lambda - x_R \leq 0 \\ & e \lambda = 1 \\ & \lambda \geq 0; \sigma \text{ free} \end{aligned} \quad (24)$$

Dal momento che il modello ha sia dati negativi sia positivi può essere solo in versione VRS (Sahoo *et al.* 2011), infatti tra i vincoli del (24) è necessario apporre  $e \lambda = 1$ ; l'ulteriore punto debole sta nel fatto che, come spiegano anche gli autori, i risultati non si prestano a un'interpretazione proporzionale.

Kerstens e Van de Woestyne (2011) seguendo l'approccio di Portela *et al.* (2004) propongono una semplice alternativa alla *Proportional distance function* in cui i *directional vectors*, sono espressi in valore assoluto:  $|y_G|$  e  $|y_B|$ . Così facendo il modello non ha il problema della negatività dei *directional vectors*. Il modello di Kerstens e Van de Woestyne (2011), denominato GPDFM, è il (25):

$$\begin{aligned}
& \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\
& \sigma y_{G\_R} + y_{G\_R} - Y_G \lambda \leq 0 \\
& \sigma |\tilde{y}_{B\_R}| + \tilde{y}_{B\_R} - \tilde{Y}_B \lambda \leq 0 \\
& X\lambda - X_R \leq 0 \\
& e\lambda = 1 \\
& \lambda \geq 0; \sigma \text{ free}
\end{aligned} \tag{25}$$

Anche questo modello, avendo dati negativi e positivi, può essere solo in versione VRS. Sahoo *et al.* (2011) dimostrano che si può arrivare allo stesso risultato ottenuto con il (25) in maniera più semplice e sviluppano il modello (26) che viene espresso come:

$$\begin{aligned}
& \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\
& \sigma y_{G\_R} + y_{G\_R} - Y_G \lambda \leq 0 \\
& \sigma y_{B\_R} + \tilde{y}_{B\_R} - \tilde{Y}_B \lambda \leq 0 \\
& X\lambda - x_R \leq 0 \\
& e\lambda = 1 \\
& \lambda \geq 0; \sigma \text{ free}
\end{aligned} \tag{26}$$

In pratica laddove nel (25) si appone il valore assoluto di un dato traslato precedentemente, nel (26) si mette direttamente il dato nella forma originale.

Tutti i modelli fin qui presentati sono radiali, nel senso che l'efficienza è misurata apponendo un coefficiente ai dati dell'azienda di riferimento, tale che se ottimizzato proietta l'azienda sulla frontiera. I modelli radiali hanno il vantaggio di esprimere l'efficienza in valori compresi tra 0 e 1, ma hanno limite di non catturare l'inefficienza di mix (inefficienza nella combinazione dei fattori produttivi e dei prodotti, che va oltre l'inefficienza di tecnica di Farrell, 1957), che può essere individuata con una DEA in versione additiva o *Slack Based Measure* (Tone, 2001). Sahoo *et al.* (2011) propongono una leggera variante al GDPFM, che è l'*SBM\_GDPFM*, in grado di calcolare l'eco-efficienza come il GDPFM e correggere il punteggio con l'inefficienza di mix sugli output. In via preliminare si opera con il seguente programma lineare:

$$\begin{aligned}
& \max_{\sigma, \lambda} \sigma \\
& \sigma y_{G\_R} + y_{G\_R} - Y_G \lambda + s_G = 0 \\
& \sigma y_{B\_R} + \tilde{y}_{B\_R} - \tilde{Y}_B \lambda + s_B = 0 \\
& X\lambda - x_R \leq 0 \\
& e\lambda = 1 \\
& \lambda, s_G, s_B \geq 0; \sigma \text{ free}
\end{aligned} \tag{27}$$

Dove  $s_G$  e  $s_B$  rappresentano i vettori con lo *slack* residuale dopo l'ottimizzazione di  $\sigma$ , quindi, dopo aver risolto il programma (27), si corregge il risultato come:

$$\left[ 1 + \frac{1}{S} \left( \sum_{i=1}^{S^G} \frac{\sigma y_{iG\_R} + s_{iG}}{y_{iG\_R}} + \sum_{i=1}^{S^B} \frac{\sigma |\tilde{y}_{iB\_R}| + s_{iB}}{|\tilde{y}_{iB\_R}|} \right) \right] \quad (28)$$

Dove  $S$  è il numero complessivo di output,  $S^G$  è il numero di *good* output e  $S^B$  è il numero di *bad* output. Il (28) è in grado di catturare l'inefficienza di mix sull'output *good* e *bad*, ma ha due limiti: non include l'inefficienza di mix sull'input e non può essere usato in versione CRS.

A questi due problemi pone rimedio modo del tutto alternativo di affrontare il problema dell'eco-efficienza con DEA, quello proposto da Cooper *et al.* (2007) p. 368. Gli autori propongono un modello non radiale denominato SBM con output non desiderabili:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, S_G, S_B, Z} \quad & \frac{1 - P_{X_R} Z}{1 + P_{Y_{GR}} S_G + P_{Y_{BR}} S_B} \\ & y_{G\_R} - Y_G \lambda + S_G = 0 \\ & y_{B\_R} - Y_B \lambda + S_B = 0 \\ & X \lambda - x_R + Z = 0 \\ & \lambda, S_G, S_B, Z \geq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Dove:

$$\begin{aligned} P_{X_R} &= \frac{1}{m} X_R^{-1} = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{x_{R1}}, \dots, \frac{1}{x_{Rm}} \right) \\ P_{Y_{GR}} &= \frac{1}{S} y_{GR}^{-1} = \frac{1}{S} \left( \frac{1}{y_{GR1}}, \dots, \frac{1}{y_{GRs^G}} \right) \\ P_{Y_{BR}} &= \frac{1}{S} y_{BR}^{-1} = \frac{1}{S} \left( \frac{1}{y_{BR1}}, \dots, \frac{1}{y_{BRs^B}} \right) \end{aligned}$$

Il programma (29) si linearizza moltiplicando tutto per  $t$ :

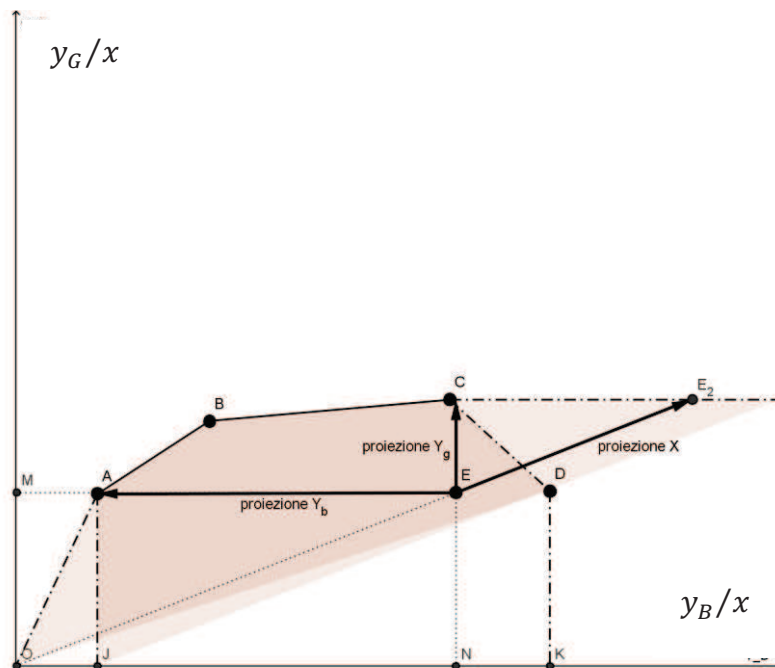
$$\begin{aligned} \min_{t, Z, S_G, S_B, \lambda} \quad & t - P_{X_R} Z \\ & t + P_{Y_{GR}} S_G + P_{Y_{BR}} S_B = 1 \\ & t y_{GR} = Y_G \lambda - S_G \\ & t y_{BR} = Y_B \lambda + S_B \\ & t x_R = X_R \lambda + Z \\ & t, Z, S_G, S_B, \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Come si può osservare il *bad* output, pur non essendo traslato, è trattato da input nei vincoli, ma è trattato da output nella funzione obiettivo, dove si trova al

denominatore. Il modello è a rendimenti costanti poiché non presenta dati negativi e non presenta traslazioni di dati (Cooper *et. al* 2007).

Apparentemente il programma (30) impatta direttamente con la critica di Färe e Grosskopf (2003), perché appone ai *bad* output lo stesso vincolo degli input, ma non è *output oriented*. In realtà, osservando la figura 10, si nota che, pur non essendo orientato il (30) non proietta mai in punti fuori dall'Assioma 4.

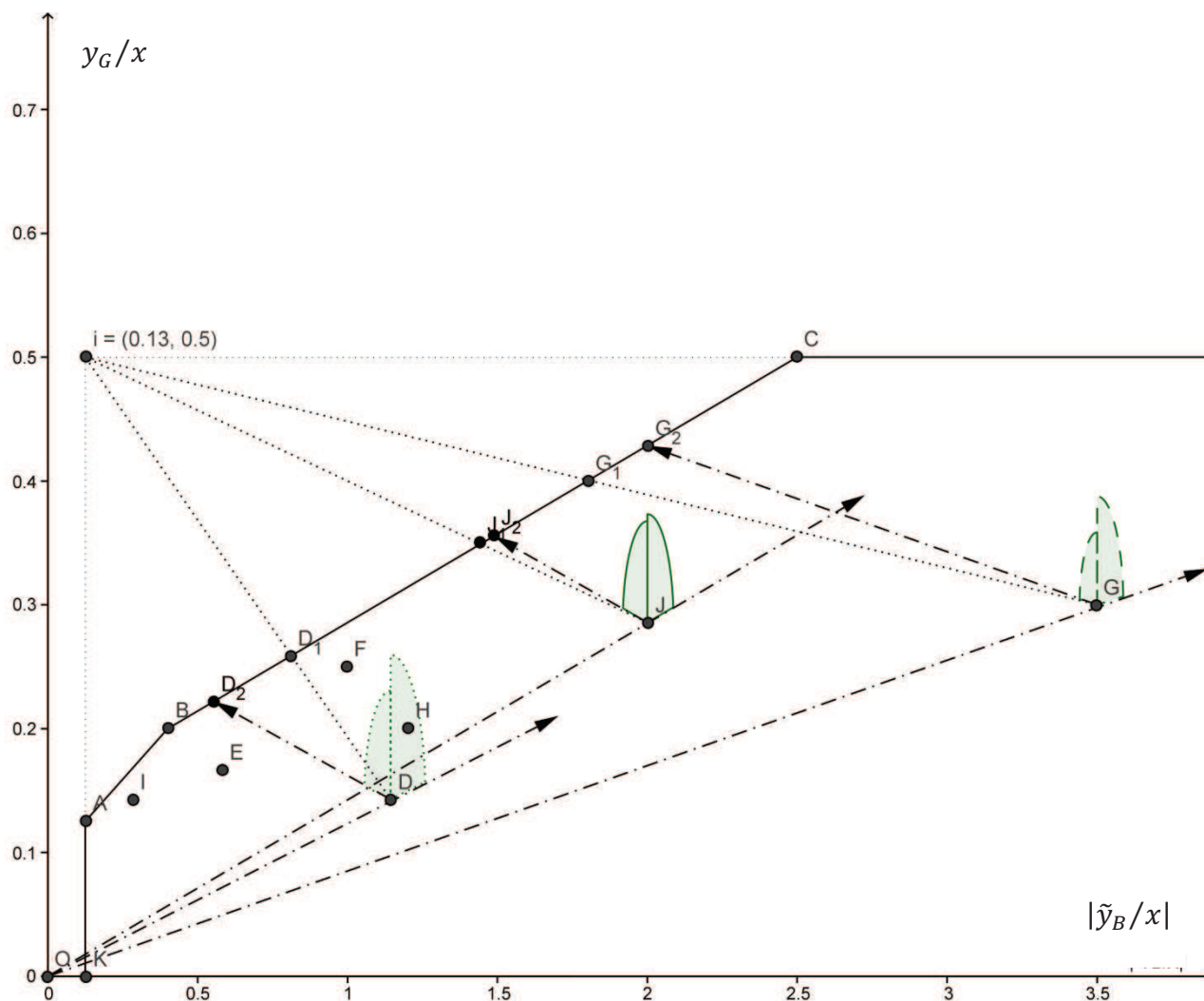
**Fig. 10 proiezioni con SBM con *bad* output**



Nell'esempio in figura 10 con le 5 aziende: A, B, C, D, E, la *reference technology*  $T^{II}$  è tutta l'area sotto A, B, C e tutta l'area sotto la semiretta che da C prosegue parallela all'asse delle ascisse. L'area impossibile individuata da Färe *et al.* (2003) è quella a destra del punto C. Tuttavia i vincoli del programma (30), massimizzando contemporaneamente tutti gli slack, l'azienda inefficiente E ha infinite possibilità di proiezione sulla frontiera, tutte comprese tra A e C. Questo poiché tutte le possibili proiezioni di E seguono tre vettori, il primo, *good output oriented*,  $\overrightarrow{EC}$ , il secondo, *bad output oriented*,  $\overrightarrow{EA}$ , il terzo, *input oriented*  $\overrightarrow{EE_2}$ ; dal momento che la funzione obiettivo del programma (30), cerca il valore massimo di tutti e tre i vettori, a destra del punto C l'azienda proiettata ha uno slack sulla variabile  $Y_b$ . Lo slack su  $Y_b$  è pari esattamente alla distanza da C ed è tale, ad esempio, da proiettare E da  $E_2$  a C.

Per mostrare graficamente i risultati dei modelli (24), (26) e (28), modelli SD che traslano  $\tilde{y}_B = (-y_B)$ , si può osservare la figura 11, su un grafico con  $|\tilde{y}_B/x|$  sulle ascisse e  $y_G/x$  sulle ordinate, con i dati della tabella 1.

**FIG. 11** frontiera per  $\tilde{y}_B = -y_B$



Fare direttamente un output *oriented* con *bad* output traslati di  $\tilde{y}_B = (-y_B)$  proietterebbe tutte le aziende inefficienti verso destra, in direzione dei vettori che partono dall'origine e si dirigono verso le aziende in analisi  $(\vec{OJ}, \vec{OD}, \vec{OG})$ , rendendo la valutazione fuorviante. Il tentativo dei vari metodi SD che traslano  $\tilde{y}_B = (-y_B)$  è quello di proiettare le aziende verso la frontiera, in modo da ottenere risultati quanto più simili a quelli in versione (15) e (16), presentati da Färe *et al.* (1989), Färe e Grosskopf (2003) e allo stesso tempo non avere G sulla frontiera.

Il primo tentativo è il metodo (24), il quale suggerisce di calcolare prima un punto  $i$ , che è una azienda immaginaria che fa il massimo di ogni output con il minimo di ogni input, nell'esempio:

$$i = \left[ \max\left(-\frac{y_B}{x}\right); \max\left(\frac{y_G}{x}\right) \right] = (-0,13; 0,5)$$

Da usare poi per la stima di efficienza, misurata come distanza tra l'azienda analizzata e la frontiera, in direzione del punto  $i$ .

Per esempio l'azienda  $J$ , che ha coordinate  $(-2; 0,28)$  con il metodo (24) sarebbe proiettata nel punto  $J_1$ , che è l'intersezione tra il segmento  $\bar{ji}$  e la frontiera, le coordinate sono  $J_1 = (-1,44; 0,35)$ , il punteggio di  $J$  è:

$$\sigma_{(24)} = \left( \frac{IJ_1}{IJ} \right) = \left( \frac{1,33}{1,89} \right) = 0,70$$

Come si può osservare il punteggio RDM dipende da due dove si trova l'azienda rispetto al punto  $i$ , infatti  $J$  ottiene un punteggio diverso dal punteggio che avrebbe ottenuto con (15) e (16) di Färe *et al.* (1989) e Färe e Grosskopf (2003).

Il modello (25), usa la stessa logica del (24), ma invece di usare il vettore di distanza dal punto  $i$  usa semplicemente il *good* e il *bad* output in valore assoluto, in questo modo  $J$  è proiettata in  $J_1$  che è l'incontro tra la frontiera e il vettore simmetrico rispetto all'asse delle ordinate di  $\vec{0j}$ . La proiezione di  $J$  ha coordinate  $J_2 = (-1,5; 0,36)$ , il punteggio (26) si calcola come:

$$\sigma_{(25)} = \left[ \frac{JJ_2}{0J} \right] = 0,25 \Rightarrow \left[ \frac{1}{1 + 0,25} \right] = 0,8$$

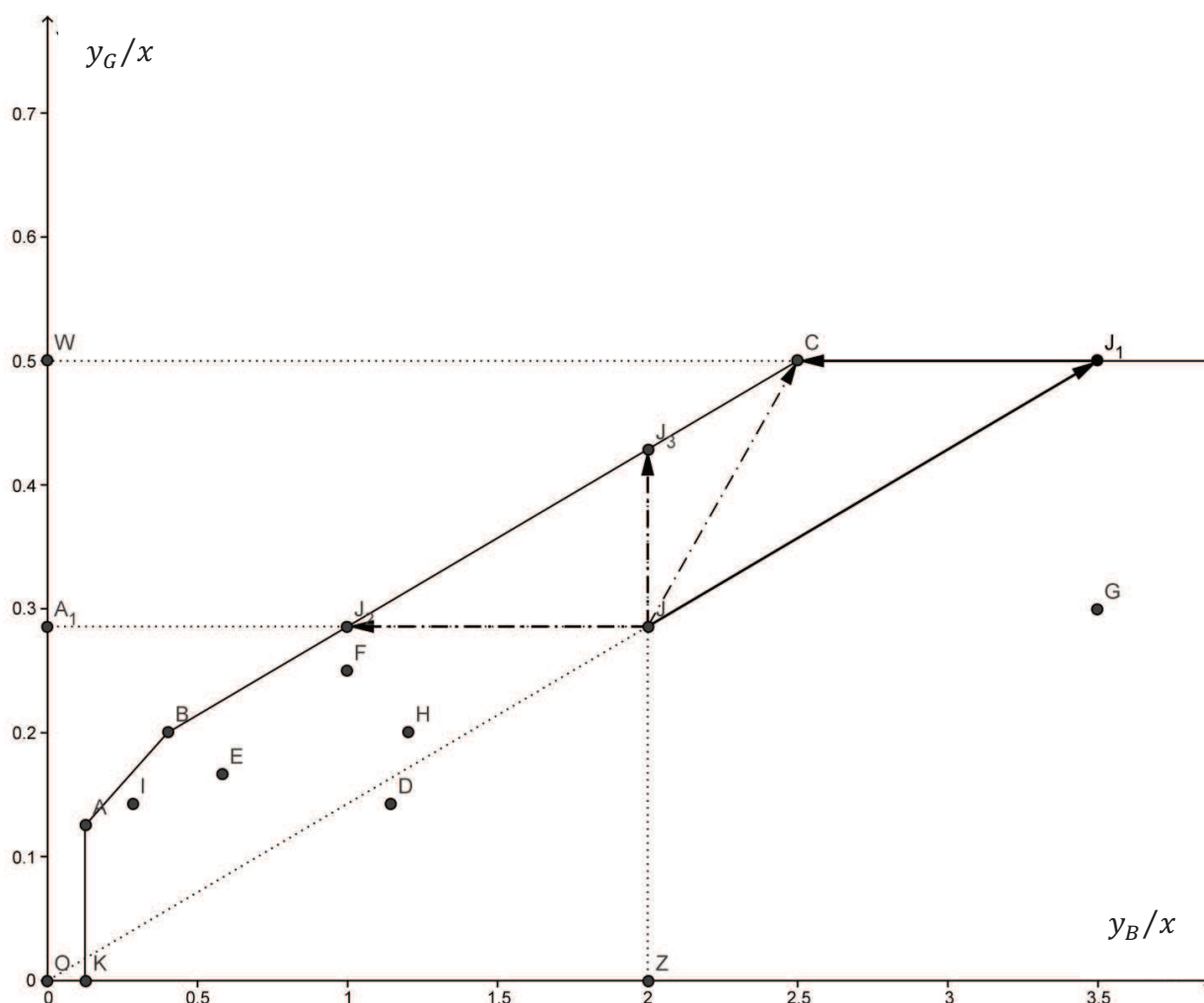
Come si può notare il punteggio di  $J$  è lo stesso dei modelli in versione (15) e (16), presentate da Färe *et al.* (1989) e Färe e Grosskopf (2003) e allo stesso tempo  $G$  non risulta sulla frontiera, ma, come si osserva in Figura 11, sarebbe proiettata in  $G_2$ .

Per presentare graficamente i risultati del programma (30) di Cooper *et al.* 2007 si può osservare la figura 12, dove su un grafico che ha  $y_B/x$  sulle ascisse e  $y_G/x$  sulle ordinate, sono riportati i dati della tabella 1. Usando il programma (30),  $J$  sarebbe proiettata in  $C$ , poiché, come osserva Tone (2010), le versioni DEA basate sull'additivo tendono a proiettare sui vertici (le aziende) e non su segmenti che uniscono due vertici della frontiera. La ragione è che la funzione obiettivo di DEA additivo minimizza l'efficienza, e, rispetto all'azienda di riferimento, i vertici della frontiera sono sempre

più lontani dei segmenti che li uniscono. Infatti C, tra le possibili proiezioni di J sulla frontiera, è quella più lontana da essa, con un punteggio SBM con *bad* output di:

$$SBM_J = \frac{1 - \left(\frac{JJ_1}{OJ}\right)}{1 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{J_1C}{J_1W}\right)\right]} = \frac{1 - \left(\frac{1,52}{3,54}\right)}{1 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3,5}\right)\right]} = 0,5$$

**FIG. 12 proiezione dell'SBM con *bad* output**



Come si può osservare il punteggio che J ottiene con l'SBM è il più basso tra tutti quelli ottenuti con gli altri modelli. La ragione è che questo modello include l'inefficienza di mix su tutte le variabili, compreso l'input. Questo modo di operare ha un punto debole, proietta in punti molto distanti e quindi sovrastima l'inefficienza, tuttavia le proiezioni sono aziende reali, quindi possibili.



I punti di forza del modello (30) sono due: la possibilità di operare a rendimenti costanti e l'ottimizzare l'input solo in funzione del *good* output. Questo è un vero passo in avanti rispetto a tutti gli altri metodi SD, che mette in luce la vera differenza tra i metodi WD e i metodi SD. I metodi WD trattando il *bad* come output comportano, inevitabilmente, di ottimizzare l'input in funzione del *good* e del *bad*. Così facendo valutano, oltre all'efficiente produzione di *good* output, l'efficiente produzione di *bad* output. Quest'ultimo indicatore corrisponde alla capacità di inquinare con il minimo delle risorse, che vuol dire, paradossalmente, incentivare il consumo di risorse il più inquinanti possibili.

#### **4. Applicazione illustrativa**

Quello che segue è un esempio di analisi con i dati estratti da Sahoo *et al.* (2011), il caso di studio riguarda 22 paesi dell'OECD. Si stima l'eco-efficienza sulla base di due input, lavoro e capitale, un *good* output, il GDP, e un *bad* output, il gas serra.

La variabile lavoro è espressa in termini di numero totale di persone occupate in tutti i settori dell'economia, il dato è preso da OECD *Labour Force Statistics*. La variabile capitale è misurata in termini di total net capital stock, include il pubblico e il privato. Il dato è stato preso da Kamps (2004). I dati del GDP sono tratti da OECD National Account. Il *bad* output è espresso come totale nazionale di emissioni di tutti i gas ad effetto serra, si misura in tonnellate di CO2 equivalente. Questo indicatore riguarda le emissioni di biossido di carbonio (CO2), metano (CH4), protossido di azoto (N2O), idrofluorocarburi (HFC), perfluorocarburi (PFC) e l'esafluoruro di zolfo (SF6). I dati sugli inquinanti provengono da UNFCCC (*United Nations Framework Convention on Climate Change*).

L'analisi è svolta per due anni 1995 e 2004, i dati del 1995 sono riportati in Tabella 2, quelli del 2004 sono in Tabella 3.

TAB. 2. dati 1995\*

	<b>Lavoro</b>	<b>Capitale</b>	<b>GDP</b>	<b>CO2</b>
Austria	3.758	660.245.150	200.047.253	80.294.469
Belgium	3.762	706.958.568	239.883.696	152.143.141
Denmark	2.602	446.791.257	133.660.523	77.446.510
Finland	2.127	393.495.036	106.361.224	71.536.877
France	22.461	4.257.855.609	1.358.619.565	562.728.557
Germany	36.176	6.636.062.088	1.905.418.367	1.095.654.249
Greece	3.821	589.911.260	148.871.014	112.084.302
Ireland	1.281	150.886.540	69.246.316	59.371.584
Italy	20.233	4.394.292.633	1.338.009.877	530.263.989
Netherlands	6.887	1.222.172.417	375.510.753	225.069.793
Portugal	4.413	341.549.575	147.158.462	71.126.524
Spain	12.671	2.156.285.729	696.475.676	318.369.512
Sweden	3.986	599.322.261	205.581.087	73.746.704
United Kingdom	26.026	3.352.278.925	1.290.796.825	710.129.428
Australia	8.276	1.197.440.296	434.659.542	444.655.522
Canada	13.341	1.941.337.588	703.930.894	645.653.989
Iceland	142	22.011.565	6.328.815	3.137.836
Japan	64.570	11.057.026.943	3.100.134.680	1.343.635.659
New Zeland	1.678	225.020.153	70.464.828	64.456.089
Norway	2.079	461.131.306	136.462.195	49.854.349
Switzerland	3.957	676.269.882	197.860.000	51.043.509
United States	126.520	20.113.217.999	7.972.961.000	6.560.936.184

Fonte: Sahoo et al. (2011)

\*il lavoro è in migliaia, il capitale e il GDP è in milioni di dollari, CO2 è in tonnellate

Tabella 3. dati 2004\*

	<b>Lavoro</b>	<b>Capitale</b>	<b>GDP</b>	<b>CO2</b>
Austria	3.744	717.713.468	244.492.308	91.177.273
Belgium	4.056	739.336.931	290.563.043	147.651.459
Denmark	2.720	435.088.848	159.670.630	69.754.758
Finland	2.387	372.498.062	146.341.837	80.895.564
France	24.666	4.405.519.865	1.669.186.957	561.028.347
Germany	36.113	7.285.177.712	2.162.681.633	1.024.956.793
Greece	4.146	470.528.420	209.779.710	137.283.639
Ireland	1.836	167.627.694	135.085.263	68.659.307
Italy	22.231	3.872.049.762	1.518.467.901	577.859.381
Netherlands	7.913	1.173.896.063	465.097.849	218.444.815
Portugal	5.189	352.012.205	181.212.308	84.660.344
Spain	17.349	2.074.482.549	961.512.162	425.236.043
Sweden	4.209	586.471.448	262.105.761	69.688.200
United Kingdom	28.008	3.235.842.671	1.668.603.175	660.424.021
Australia	9.630	1.236.745.956	599.870.229	523.590.089
Canada	16.005	2.113.351.298	949.925.203	747.349.727
Iceland	156	19.177.594	9.002.473	3.677.940
Japan	63.290	14.696.352.216	3.431.407.056	1.356.989.419
New Zeland	1.976	227.080.573	93.411.724	75.118.325
Norway	2.250	360.540.919	176.329.157	54.891.589
Switzerland	4.174	732.885.498	225.608.421	53.036.250
United States	140.588	23.219.774.706	10.704.060	7.189.714.549

Fonte: Sahoo et al. (2011)

\*il lavoro è in migliaia, il capitale e il GDP è in milioni di dollari, CO2 è in tonnellate

Sulla base dei dati in tabella 2 e tabella 3 si applicano i modelli più significativi presentati nei paragrafi precedenti. Anche se una buona parte dei modelli possono essere anche usati in versione CRS, l'analisi è in versione VRS per poter confrontare i risultati. I risultati per il 1995 sono in Tabella 4, quelli per il 2004 sono in Tabella 5.

Tabella 4. risultati 1995

	<b>WD</b>			<b>SD</b>					<b>SBM</b>
	(15) e	(16)	(17)	(21)	(22)	(24)	(25)	(28)	(30)
Austria	0,95	0,94		1,00	0,94	1,00	0,95	0,95	0,89
Belgium	1,00	1,00		1,00	0,99	1,00	0,99	0,98	0,96
Denmark	0,89	0,87		0,99	0,87	1,00	0,89	0,89	0,76
Finland	0,83	0,81		0,99	0,81	1,00	0,83	0,83	0,68
France	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Germany	0,92	0,90		0,96	0,90	0,97	0,93	0,93	0,82
Greece	0,74	0,70		0,99	0,70	0,99	0,74	0,75	0,57
Ireland	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italy	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Netherlands	0,91	0,90		0,99	0,90	0,99	0,91	0,91	0,79
Portugal	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Spain	0,97	0,97		1,00	0,97	1,00	0,97	0,97	0,92
Sweden	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
UK	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Australia	0,90	1,00		0,97	0,90	0,99	0,90	0,89	0,78
Canada	0,91	0,91		0,97	0,90	0,99	0,91	0,91	0,81
Iceland	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Japan	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
New Zeland	0,81	0,77		0,99	0,77	1,00	0,81	0,81	0,67
Norway	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Switzerland	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
United States	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Average	0,95	0,94		0,99	0,94	1,00	0,95	0,95	0,89
Std. Dev.	0,07	0,09		0,01	0,09	0,01	0,07	0,07	0,13

Tabella 5. risultati 2004

	WD			SD					SBM
	(15)	(16)	(17)	(21)	(22)	(24)	(25)	(28)	(30)
Austria	0,92	0,88		1,00	0,88	1,00	0,92	0,92	0,76
Belgium	0,94	0,93		0,99	0,93	1,00	0,94	0,94	0,79
Denmark	0,83	0,77		1,00	0,77	1,00	0,83	0,83	0,66
Finland	0,79	0,80		0,99	0,79	1,00	0,79	0,79	0,64
France	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Germany	0,93	0,90		0,97	0,90	0,98	0,93	0,93	0,89
Greece	0,80	0,75		0,99	0,75	0,99	0,80	0,80	0,62
Ireland	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italy	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Netherlands	0,88	0,86		0,99	0,86	0,99	0,88	0,88	0,77
Portugal	0,91	0,88		1,00	0,88	1,00	0,91	0,91	0,63
Spain	0,93	0,91		0,99	0,91	0,99	0,93	0,93	0,85
Sweden	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
UK	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Australia	1,00	1,00		0,96	0,93	1,00	0,93	0,82	0,76
Canada	0,92	0,94		0,95	0,89	0,99	0,89	0,84	0,74
Iceland	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Japan	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
New Zeland	0,73	0,64		0,99	0,63	1,00	0,73	0,73	0,49
Norway	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Switzerland	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
United States	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Average	0,94	0,92		0,99	0,91	1,00	0,93	0,92	0,85
Std. Dev.	0,08	0,10		0,01	0,10	0,01	0,08	0,09	0,17

Si osserva che usando i modelli (15), (16) e (17), modelli WD, si ottiene un numero di paesi efficienti al 100% superiore rispetto a quello ottenuto usando metodi SD (vedi Belgio 1995 e Australia 2004). Il motivo è che i metodi WD sono meno selettivi in quanto rilevano efficiente anche il paese che produce relativamente più *bad* output di tutti. Con i metodi (28) e (30) i paesi efficienti al 100% sono gli stessi, ma i punteggi ottenuti con il (30) sono mediamente più bassi, questo perché, come spiega Tone (2010), l'SBM proietta l'azienda nel punto meno favorevole alla sua efficienza, inoltre il (30) rileva anche l'inefficienza di mix sull'input.

In Tabella 6 ci sono le correlazioni tra i punteggi ottenuti con i diversi modelli.

Tabella 6. correlazioni tra i punteggi

WD				SD					SBM
1995	(15) e (16)	(17)	(21)	(22)	(24)	(25)	(28)	(30)	
<b>WD</b>	(15) e (16)	1,0000							
	(17)	0,9557	1,0000						
<b>SD</b>	(21)	0,4388	0,3127	1,0000					
	(22)	0,9980	0,9690	0,4257	1,0000				
	(24)	0,3793	0,3572	0,8662	0,3905	1,0000			
	(25)	0,9999	0,9556	0,4368	0,9979	0,3763	1,0000		
	(28)	0,9982	0,9495	0,4432	0,9961	0,3757	0,9987	1,0000	
<b>SBM</b>	(30)	0,9870	0,9332	0,5194	0,9845	0,4420	0,9872	0,9892	
								1,0000	
WD				SD					SBM
2004	(15) e (16)	(17)	(21)	(22)	(24)	(25)	(28)	(30)	
<b>WD</b>	(15) e (16)	1,0000							
	(17)	0,9850	1,0000						
<b>SD</b>	(21)	0,1490	0,0883	1,0000					
	(22)	0,9788	0,9850	0,2255	1,0000				
	(24)	0,3648	0,3478	0,6917	0,3846	1,0000			
	(25)	0,9792	0,9591	0,2941	0,9873	0,3992	1,0000		
	(28)	0,8804	0,8525	0,4905	0,9279	0,4255	0,9582	1,0000	
<b>SBM</b>	(30)	0,9043	0,8964	0,3446	0,9407	0,3494	0,9478	0,9416	
								1,0000	

Si osserva che la correlazione più alta si ha per il 1995 tra i modelli (15) e (16) e il modello (25), questo accade perché i due modelli proiettano nello stesso punto, entrambi non hanno gli slack, l'unica differenza è che i (15) e (16) hanno più efficienti (il Belgio), in quanto WD. Correlazioni alte si hanno in generale tra i metodi (15) e (16) (WD), (25), (28) (SD) e (30) (SBM). I primi quattro proiettano esattamente nello stesso punto, ma quelli SD hanno il vantaggio di beccare l'inefficienza di chi produce più *bad* output di tutti. Il (28) ha, inoltre, il vantaggio di beccare l'eventuale inefficienza di mix sugli output, infine il (30) è in grado di registrare anche l'inefficienza di mix sugli input.

Le correlazioni più basse con tutti gli altri metodi si registrano per i programmi (21) e (24), il primo che trasla di  $\tilde{y}_B = (-y_B + w)(> 0)$  e il secondo che introduce il punto I e i *Range directional vectors*.

## **Riferimenti bibliografici**

- Banker, R. D. Charnes, A. Cooper, W. W., (1984) "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis", *Management Science* 30, pp. 1078-1092.
- Banker, R.D. Morey, R.C., (1986) "Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs" *Operations Research*, 34 (4), pp. 513-521.
- Chambers, R. G., Chung, Y. H., Färe, R., (1996) "Benefit and distance functions", *Journal of economic theory* 70, pp. 407-419
- Chambers, R. G., Chung, Y. H., Färe, R., (1998) "Profit, directional distance functions, and nerlovian efficiency", *Journal of optimization theory and applications* Vol 98, No. 2, pp. 351-364
- Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J., (1985) "Foundation of data envelopment analysis and Pareto-Koopmans empirical production functions", *Journal of Econometrics*, 30, pp. 91-107
- Chen, C. M. (2013) "A critique of non-parametric efficiency analysis in energy economics studies", *Energy Economics* 38, 146-152
- Chung, Y. H., Färe, R., Grosskopf, S., (1997) "Productivity and undesirable outputs: a directional distance function approach", *Journal of Environmental Management* 51, pp. 229-240.
- Cooper, W. W., Seiford, M. S., Tone, K., (2007) *Data Envelopment Analysis, A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA -Solver Software, Second Edition*, Springer.
- Dyckhoff, H., Allen, K., (2001) "Measuring ecological efficiency with data envelopment analysis (DEA)", *European Journal of Operational Research* 132, 312-325
- Färe, R., Grosskopf, S., (1994) *Cost and Revenue Constrained Production*, Springer - Verlag.
- Färe, R., Grosskopf, S., (2003) "Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs: Comment", *American Journal of Agricultural Economics* 85, pp. 1070-1074.

- Färe, R., Grosskopf, S., (2004) "Modeling undesirable factors in efficiency evaluation: Comment", *European Journal of Operational Research* 157, pp. 242–245.
- Färe, R., Grosskopf, S., (2009) "A comment on weak disposability in nonparametric production analysis", *American Journal of Agricultural Economics* 91, pp. 535–538.
- Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., Pasurka, C., (1989) "Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach", *Review of Economics and Statistics* 71, pp. 90–98.
- Farrell, M. J., (1957) "The measurement of productive efficiency", *Journal of Royal Statistical Society, Series A. General*, 120, Part 3, pp. 253–281.
- Hailu, A., (2003) "Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs: Reply", *American Journal of Agricultural Economics* 85, pp. 1075–1077.
- Hailu, A., Veeman, T.S., (2001) "Non-parametric productivity analysis with undesirable outputs: An application to the Canadian pulp and paper industry", *American Journal of Agricultural Economics* 83, 605–616.
- Kamps, C., (2004) "New estimates of Government net capital stocks for 22 OECD countries 1960-2001" *IMF Working Paper* 04/67, Washington, DC
- Kerstens, K., Mounir, A., Van de Woestyne, I., (2011) "Geometric representation of the mean-variance-skewness portfolio frontier based upon the shortage function", *European Journal of Operational Research* 210, pp. 81–94.
- Kerstens, K., Van de Woestyne, I., (2011) "Negative data in DEA: A simple proportional distance function approach" *Journal of the Operational Research Society* 62, pp. 1413–1419.
- Korhonen, P., Luptacik, M., (2004) "Eco-efficiency analysis of power plants: an extension of data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research* 154, pp. 437–44.
- Lovell, C.A.K., (1995) "Measuring the macroeconomic performance of the Taiwanese economy" *International Journal of Production Economics* 39, pp. 165–178.
- Lovell, C.A.K., Pastor, J.T., (1999) "Radial DEA models without inputs or without outputs" *European Journal of Operational Research* 118, 46–51.



- Pastor, J.T., (1996) "Translation invariance in data envelopment analysis: A generalization", *Annals of Operations Research* 66, pp. 93–102.
- Pittman, R., (1983) "Multilateral Productivity Comparisons with Undesirable Outputs." *The Economic Journal*. 93 pp. 883-91.
- Portela, M.C.A.S., Thanassoulis, E., Simpson, G., (2004) "Negative data in DEA: A directional distance approach applied to bank branches", *Journal of the Operational Research Society* 55, pp. 1111–1121.
- Sahoo, B.K., Luptacik, M., Mahlberg, B., (2011) "Alternative measures of environmental technology structure in DEA: an application", *European Journal of Operational Research* 215, pp 750-762.
- Seiford, L.M., Zhu, J., (2002) "Modeling undesirable factors in efficiency evaluation", *European Journal of Operational Research* 142, pp. 16–20.
- Sharp, J.A., Meng, W., Liu, W., (2007) "A modified slacks-based measure model for data envelopment analysis with 'natural' negative outputs and inputs" *Journal of the Operational Research Society* 58, pp. 1672–1677.
- Tone, K., (2001) "A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research* 130, pp. 498–509.
- Tone, K., (2010) "Variations on the theme of slacks-based measure of efficiency in DEA", *European Journal of Operational Research* 200, pp. 901–907.